



# МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ-2

## ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ КІЛЬКОХ ДІЙСНИХ ЗМІННИХ. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ.

### Робоча програма навчальної дисципліни (Силабус)

#### Реквізити навчальної дисципліни

Рівень вищої освіти	<i>Перший (бакалаврський)</i>
Галузь знань	<i>12 Інформаційні технології</i>
Спеціальність	<i>122 Комп'ютерні науки</i>
Освітня програма	<i>Системи і методи штучного інтелекту; Інтелектуальні сервіс-орієнтовані розподілені обчислення.</i>
Статус дисципліни (код)	<i>Нормативна (ПО 1)</i>
Форма навчання	<i>очна(денна)/дистанційна/змішана</i>
Рік підготовки, семестр	<i>1 курс, весняний семестр</i>
Обсяг дисципліни	<i>5кредитів ЄКТС</i>
Семестровий контроль/ контрольні заходи	<i>Екзамен</i>
Розклад занять	<i>Rozklad.kpi.ua</i>
Мова викладання	<i>Українська</i>
Інформація про керівника курсу / викладачів	<i>Лектор: к.ф.-м.н., доцент, Подколзін Гліб Борисович <a href="mailto:podkolzin.gleb@lll.kpi.ua">podkolzin.gleb@lll.kpi.ua</a>, Практичні: к.ф.-м.н., доцент, Подколзін Гліб Борисович, к.ф.-м.н., доцент, Мальцев Антон Юрійович, <a href="mailto:podkolzin.gleb@lll.kpi.ua">podkolzin.gleb@lll.kpi.ua</a>, <a href="mailto:maltsev.anton@lll.kpi.ua">maltsev.anton@lll.kpi.ua</a></i>
Розміщення курсу	<i>Googleclassroom</i>

#### Програма навчальної дисципліни

##### 1. Опис навчальної дисципліни, її мета, предмет вивчення та результати навчання

Дана дисципліна є однією з фундаментальних в освітній програмі. Вивчення навчальної дисципліни націлено на формування, розвиток та закріплення у здобувачів таких загальних та фахових **компетентностей**: ЗК 1 Здатність застосовувати знання в практичних ситуаціях. ЗК 2 Здатність планувати і управляти часом. ЗК 3 Здатність абстрактно мислити, застосовувати методи аналізу і синтезу. ЗК 9 Здатність до адаптації та дії в новій ситуації. ЗК 14 Здатність забезпечувати та оцінювати якість виконуваних робіт. ЗК 15 Здатність реалізовувати свої права та обов'язки як члена суспільства, усвідомлювати цінності громадянського (вільного демократичного) суспільства та необхідність його сталого розвитку, верховенства права, прав і свобод людини і громадянина в Україні, дотримуватися академічної доброчесності.

ФК 1 Здатність до математичного формулювання та досліджування неперервних та дискретних математичних моделей, обґрунтування вибору методів і підходів для розв'язування теоретичних і прикладних задач у галузі комп'ютерних наук, аналізу та інтерпретування.

Внаслідок вивчення курсу студент повинен бути здатний продемонструвати такий **програмний результат навчання ОПП**: ПРН 02 Використовувати сучасний математичний апарат неперервного та дискретного аналізу, лінійної алгебри, аналітичної геометрії, в професійній діяльності для розв'язання задач теоретичного та прикладного характеру в процесі проектування та реалізації об'єктів

інформатизації.

У кінці вивчення курсу студент повинен **знати**: вступ до математичного аналізу (множини на прямій, послідовності та їхні границі, функції та їхні границі, неперервність, властивості неперервних функцій); диференціальне числення функцій однієї змінної (диференційовність та похідна, властивості диференціала та похідно першого і вищих порядків, формула Тейлора та її застосування до наближених обчислень, дослідження на екстремум);

## **2. Пререквізити та постреквізити дисципліни (місце в структурно-логічній схемі навчання за відповідною освітньою програмою)**

*Дисципліна передувє і забезпечує наступні навчальні дисципліни у програмі підготовки фахівця: «Основи фізики» (ПО 5), «Основи системного аналізу» (ПО 10), «Теорія ймовірностей, ймовірнісні процеси та математична статистика» (ПО 2), «Фізика коливально-хвильових процесів» (ПО 19), «Обчислювальна математика» (ПО 21), «Основи системного аналізу» (ПО 10), «Дослідження операцій» (ПО 25).*

*Вивчення курсу ґрунтується на широкому використанні основних розділів дисциплін: Математичний аналіз. Частина 1. Диференціальне числення функцій однієї дійсної змінної (ПО 1.1), Алгебра та аналітична геометрія” (ПО 3) та “Дискретна математика” (ПО 4).*

## **3. Зміст навчальної дисципліни**

### **РОЗДІЛ23. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ДІЙСНОЇ ЗМІННОЇ**

#### **Тема 2.1. Невизначений інтеграл**

*Первісна та невизначений інтеграл. Властивості. Заміна змінної. Інтегрування частинами. Таблиця інтегралів. Інтегрування раціональних дробов. Інтегрування деяких складних тригонометричних функцій. Інтегрування ірраціональних функцій. Підстановки Ейлера. Інтегрування диференціального бінома.*

#### **Тема 2.2. Визначений інтеграл**

*Алгебра множин. Міра. Заряд. Інтеграл від простої функції та його властивості. Норма в просторі обмежених функцій. Рівномірна збіжність функціональних послідовностей. Продовження інтеграла. Інтегрування неперервних та кусково-неперервних функцій. Властивості інтеграла: . Граничний перехід під знаком інтеграла. Інтеграл по підмножині. Адитивність інтеграла. Побудова заряду за заданою щільністю відносно міри. Зв’язок визначеного інтеграла та первісної. Формула Ньютона-Лейбніця. Заміна змінної та інтегрування частинами у визначеному інтегралі. Інтеграл як границя інтегральних сум. Квадровні множини на площині та їх властивості. Площа криволінійної трапеції та криволінійного сектора. Застосування інтеграла до обчислення довжини кривої, об’єму тіла обертання та площі поверхні обертання. Варіація заряду. Функції обмеженої варіації. Інтеграл Стільтьєса та його зв’язок з визначеним інтегралом.*

#### **Тема 2.3. Невласні інтеграли**

*Невласні інтеграли першого роду. Критерій Коші. Абсолютна та умовна збіжність. Теореми порівняння. Інтегральна ознака збіжності числового ряду. Невласні інтеграли другого роду. Невласні інтеграли в сенсі головного значення*

### **РОЗДІЛ 3. ФУНКЦІОНАЛЬНІ ПОСЛІДОВНОСТІ ТА РЯДИ**

#### **Тема 34.1. Числові ряди**

*Числові ряди—означення та приклади. Критерій Коші. Знакосталі ряди. Теореми порівняння. Ознаки Коші та Даламбера. Абсолютна та умовна збіжність. Ознака Лейбніца. Властивості збіжних рядів.*

#### **Тема 3.2. Функціональні послідовності та ряди**

*Поточкова та рівномірна збіжність функціональних послідовностей та рядів. Критерій Коші рівномірної збіжності функціонального ряду. Ознака Вейєрштрасса. Неперервність суми функціонального ряду з неперервними членами. Теорема Діні. Диференціювання та інтегрування функціональних послідовностей та рядів. Степеневі ряди в комплексній області. Теорема Абеля. Формула Коші-Адамара. Властивості суми степеневого ряду. Ряди Тейлора. Розвинення в ряд Тейлора елементарних функцій. Поняття про аналітичні функції дійсного аргументу.*

### **РОЗДІЛ 4. ФУНКЦІЇ ВЕКТОРНОЇ ЗМІННОЇ**

#### **ТЕМА 4.1. ТОПОЛОГІЯ ПРОСТОРУ $\square^n$ .**

*Відкриті Та Замкнені Множини. Основні Принципи Аналізу В  $\square^n$ . Границя Та Неперервність Функцій Кількох Змінних. Властивості Неперервних Функцій.*

#### **ТЕМА 4.2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ КІЛЬКОХ ДІЙСНИХ ЗМІННИХ**

*Частинні Похідні Та Диференціал Функції Векторної Змінної. Матриця Якобі. Диференціювання Композиції Функцій. Похідна За Напрямком. Градієнт. Поверхня В Тривимірному Просторі Та Рівняння Дотичної Площини.*

#### **ТЕМА 4.3. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ КІЛЬКОХ ДІЙСНИХ ЗМІННИХ**

*Частинні Похідні Вищих Порядків. Умова Незалежності Від Порядку Диференціювання. Формула Тейлора Для Функцій Кількох Змінних. Матриця Гессе. Вищі Диференціали. Теорема Про Неявну Функцію. Теорема Про Обернену Функцію.*

#### **ТЕМА 4.4. ЕКСТРЕМУМ ФУНКЦІЙ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ**

*Екстремум функцій кількох змінних. Локальний екстремум функцій кількох змінних. Необхідна та достатня ознака. Умовний екстремум. Метод множників Лагранжа. Необхідна ознака умовного екстремуму.. Достатня ознака умовного екстремуму. Задачі на найбільші та найменші значення.*

#### **РОЗДІЛ 5. ІНТЕГРАЛИ, ЩО ЗАЛЕЖАТЬ ВІД ПАРАМЕТРА**

##### **Тема 5.1. Інтеграл, що залежить від параметра**

*Власні інтеграл, що залежить від параметра. Неперервність, інтегрування та диференціювання Невласні інтеграл, що залежить від параметра. Рівномірна збіжність. Неперервність диференціювання та інтегрування за параметром. Застосування. Обчислення інтеграла Діріхле та інтеграла Ейлера-Пуассона. Ейлерові інтеграл Г- та В-функції та їх властивості. Застосування.*

## **4. Навчальні матеріали та ресурси**

### **Базова**

#### **1. В. Г. Бондаренко, Г. Б. Подколзін МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ ЧАСТИНА 1**

Диференціальне та інтегральне числення функцій дійсної змінної, диференціальне числення функцій векторної змінної

<https://ela.kpi.ua/handle/123456789/66947>

2. Богданський Ю.В. Інтеграл в курсі математичного аналізу. (Електронний посібник) К., КПІ, 2013 — 180с. <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/3581>

3. Диференціальні рівняння. Конспект лекцій. Електронний ресурс] : навчальний посібник для студентів спеціальності 113 «прикладна математика» / В. Г. Бондаренко ; КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022.—124 с. <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/52654>

4. Збірник задач з математичного аналізу. Частина I. Функції однієї змінної. М. О. Денисьєвський, О. О. Курченко, В. Н. Нагорний, О. Н. Нестеренко, Т. О. Петрова, А. В. Чайковський / – К.: ВПЦ "Київський університет", 2005. – 257 с. <http://www.mechmat.univ.kiev.ua/wp-content/uploads/2018/03/all.pdf>

### **Допоміжна**

5. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз. Частина 1: підручник. К: Либідь, 1993. 320 с

6. Ляшко І.І., Ємельянов В.Ф., Боярчук О.К. Математичний аналіз. У 2-х частинах. Частина 1: підручник. Київ : Вища школа, 1992. - 595 с

7. Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О. Диференціальні рівняння: Підручник / 2-ге вид., перероб. і доп. —К.: Либідь, 2003. -600 с.

8. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г., Кривошеєва Г.М. та ін. Вища математика у прикладах та задачах. Ч.2. Інтегральне числення функцій однієї змінної. Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних. 2-е вид. доп. і доопр. – К.: Кондор, 2006. – 460с

9. Математичний аналіз 2: Інтегральне числення, функціональні ряди, диференціальні рівняння. Збірник задач для розрахункових робіт [Електронний ресурс]. навчальний. посібник для студентів.

## Навчальний контент

### 5. Методика опанування навчальної дисципліни(освітнього компонента)

#### Лекційні заняття

№	Назва теми лекції та перелік основних питань
1	Первісна та невизначений інтеграл. Властивості. Заміна змінної. Інтегрування частинами. Таблиця інтегралів. Приклади.
2	Інтегрування раціональних дробів. Приклади. Інтегрування деяких складних тригонометричних функцій. Інтегрування ірраціональних функцій. Підстановки Ейлера. Інтегрування диференціального бінома.
3	Прості функції. Інтеграл від простої функції та його властивості.
4	Норма в просторі обмежених функцій. Рівномірна збіжність функціональних послідовностей. Продовження інтеграла.
5	Інтегрування неперервних та кусково-неперервних функцій. Властивості інтеграла: лінійність, невід'ємність, монотонність, оцінка інтеграла, теорема про середнє. Граничний перехід під знаком інтеграла.
6	Інтеграл по підмножині. Адитивність інтеграла. Аддитивна функція множини, зв'язок з інтегралом. Зв'язок визначеного інтеграла та первісної. Формула Ньютона-Лейбніца. Заміна змінної та інтегрування частинами у визначеному інтегралі.
7	Квадровні множини на площині та їх властивості. Площа криволінійної трапеції та криволінійного сектора.
8	Застосування інтеграла до обчислення довжини кривої, об'єму тіла обертання та площі поверхні обертання.
9	Невласні інтеграл. Критерій Коші. Абсолютна та умовна збіжність. Теорема порівняння. Приклади.
10	Інтегральна ознака збіжності числового ряду. Невласні інтеграли в сенсі головного значення. Приклади.
11	Поточкова та рівномірна збіжність функціональних послідовностей та рядів. Властивості рівномірно збіжних послідовностей. Критерій Коші рівномірної збіжності функціонального ряду.
12	Ознака Вейерштрасса. Неперервність суми функціонального ряду з неперервними членами. Диференціювання та інтегрування функціональних послідовностей та рядів.
13	Степеневі ряди в комплексній області. Теорема Абеля. Формула Коші-Адамара. Властивості суми степеневого ряду.
14	Ряди Тейлора. Розклад в ряд Тейлора елементарних функцій. Поняття про аналітичні функції.

	<i>Властивості неперервних функцій. Узагальнення теорем Вейєрштрасса та теореми Больцано-Коші. Теорема Кантора про рівномірну неперервність.</i>
	<i>Диференціал та похідна функції кількох змінних. Неперервність диференційованої функції. Часткові похідні. Похідна за напрямком.</i>
15	<i>Градiєнт та його властивості. Диференціювання векторозначних функцій кількох змінних. Матриця Якобі. Приклади. Арифметичні властивості диференційованих функцій.</i>
16	<i>Диференціювання складеної функції. Достатня умова диференційованості функції.</i>
17	<i>Часткові похідні вищих порядків. Умова незалежності від порядку диференціювання. Графік функції двох змінних. Дотична площина.</i>
18	<i>Формула Тейлора для функцій кількох змінних. Матриця Гессе. Вищі диференціали.</i>
19	<i>Теорема про неявну функцію. Теорема про обернену функцію.</i>
20	<i>Локальний екстремум функцій кількох змінних. Необхідна та достатня ознака.</i>
21	<i>Умовний екстремум. Метод множників Лагранжа. Необхідна ознака умовного екстремуму.</i>
22	<i>Достатня ознака умовного екстремуму. Задачі на найбільші та найменші значення.</i>
23	<i>Власні інтеграли, що залежать від параметру. Неперервність, інтегрування та диференціювання (випадок сталих та змінних границь інтегрування).</i>
24	<i>Невласні інтеграли, що залежать від параметру. Рівномірна збіжність. Неперервність диференціювання та інтегрування за параметром.</i>
25	<i>Застосування. Обчислення інтеграла Діріхле та інтеграла Ейлера-Пуассона.</i>
26	<i>Ейлерові інтеграли. - та - функції та їх властивості. Застосування.</i>
27	<i>Первісна та невизначений інтеграл. Властивості. Заміна змінної. Інтегрування частинами. Таблиця інтегралів. Приклади.</i>

### Практичні заняття

<i>№</i>	<i>Назва теми занять</i>
1	<i>Невизначений інтеграл. Заміна змінних, інтегрування частинами.</i>
2	<i>Інтегрування раціональних функцій.</i>
3	<i>Інтегрування ірраціональних та тригонометричних функцій.</i>
4	<i>Визначений інтеграл, заміна змінних, інтегрування частинами.</i>
5	<i>Обчислення площ, довжин дуг, об'ємів.</i>
6	<i>Невласні інтеграли. Застосування інтегральної ознаки Коші.</i>
7	<i>Функціональні послідовності та ряди, область збіжності, рівномірна збіжність.</i>

8	Степеневі ряди, диференціювання та інтегрування рядів. Ряд Тейлора.
9	Границя та неперервність функції багатьох змінних.
10	Часткові похідні. Диференціал.
11	Диференціювання неявних та складених функцій. Диференціювання $n$ -го порядку.
12	Геометричні застосування.
13	Заміна змінних в диференціальних виразах.
14	Формула Тейлора.
15	Екстремум функції багатьох змінних.
16	Умовний екстремум функції багатьох змінних.
17	Інтеграли, залежні від параметру неперервність, інтегрованість, диференційованість. Невласні інтеграли, залежні від параметру, рівномірна збіжність.
18	Ейлерові інтеграли. Диференціювання та інтегрування невластних інтегралів.

## 6. Політика навчальної дисципліни (освітнього компонента)

Студенти на протязі семестру отримують бали за виконання модульних контрольних робіт, за виконання розрахунково-графічних робіт, за семестрову залікову роботу, або за іспит наприкінці семестру

Роботи мають бути виконані з дотриманням академічної доброчесності. Політика та принципи академічної доброчесності, етична поведінка студентів визначені у Кодексі честі <https://kpi.ua/code>.

## 7. Види контролю та рейтингова система оцінювання результатів навчання (PCO)

Семестровий контроль: **екзамен**

Рейтинг студента з дисципліни за семестр складається з балів, що він отримує за:

Умовою атестації є поточний рейтинг не менше 50% запланованих балів.

Умовою допуску до екзамену є стартовий рейтинг не менше 30 балів.

Критерії нарахування балів за контрольні заходи:

~ "відмінно": 95 -100% - здобувач виявив всебічні, систематичні та глибокі знання навчального матеріалу з дисципліни; продемонстрував уміння вільно виконувати всі завдання, передбачені програмою; засвоїв основну та додаткову літературу; проявив творчі здібності в розумінні, в логічному, чіткому, стислому та ясному трактуванні навчального матеріалу; засвоїв взаємозв'язок основних понять дисципліни, їх значення для подальшої професійної діяльності

~ "дуже добре": 85-94% - здобувач виявив систематичні знання навчального матеріалу з дисципліни вище середнього рівня; продемонстрував уміння добре виконувати всі завдання, передбачені програмою, допустивши незначні помилки; засвоїв основну та додаткову

літературу; засвоїв взаємозв'язок основних понять дисципліни, їх значення для подальшої професійної діяльності

~“добре”: 75-84% - здобувач виявив загалом добрі знання навчального матеріалу при виконанні передбачених програмою завдань, але припустив ряд помітних помилок; засвоїв основну літературу; показав систематичний характер знань з дисципліни; здатний до їх самостійного використання та поповнення в процесі подальшої навчальної роботи і професійної діяльності

~“задовільно”: 65-74% - здобувач виявив знання основного навчального матеріалу з дисципліни в обсязі, необхідному для подальшого навчання та майбутньої професійної діяльності; ознайомився з основною літературою; впорався з виконанням завдань, передбачених програмою, але припустив значну кількість помилок або недоліків на запитання при співбесіді, тестуванні та при виконанні завдань тощо, принципів з яких може усунути самостійно

~“достатньо”: 60-64% - здобувач виявив знання основного навчального матеріалу з дисципліни в мінімальному обсязі, необхідному для подальшого навчання та майбутньої професійної діяльності; ; ознайомився з основною літературою; в основному виконав завдання, передбачені програмою, але припустив помилки у відповіді на запитання при співбесідах, тестуванні та при виконанні завдань тощо, які він може усунути лише під керівництвом та за допомогою викладача

~“незадовільно”: 30-59% - здобувач мав значні прогалини в знаннях основного навчального матеріалу; допускав принципові помилки при виконанні передбачених програмою завдань, але спроможний самостійно доопрацювати програмний матеріал і підготуватися для перездачі дисципліни

~“незадовільно”: 0-29% - здобувач не мав знань зі значної частини навчального матеріалу з дисципліни; допускав принципові помилки при виконанні більшості передбачених програмою завдань або не виконував ці завдання

**Таблиця відповідності рейтингових балів оцінкам за університетською шкалою:**

Бали: практичні заняття + МКР + екзаменаційна робота	Оцінка
100...95	<i>Відмінно</i>
94...85	<i>Дуже добре</i>
84...75	<i>Добре</i>
74...65	<i>Задовільно</i>
64...60	<i>Достатньо</i>
Менше 60	<i>Незадовільно</i>
стартовий рейтинг менше 30 балів	<i>Не допущено</i>

### **Робочу програму навчальної дисципліни (силабус):**

Складено *к.ф.-м.н., доцент, Подколзін Гліб Борисович*

Ухвалено кафедрою ММСА (*протокол №13 від 05.06.2024*)

Погоджено Методичною комісією ІПСА (*протокол № 10, від 24.06.2024*)