



# МАТЕМАТИЧНА ЛОГІКА ТА ТЕОРІЯ АЛГОРИТМІВ

## Робоча програма навчальної дисципліни (Силабус)

### Реквізити навчальної дисципліни

Рівень вищої освіти	<i>Перший (бакалаврський)</i>
Галузь знань	<i>12 Інформаційні технології</i>
Спеціальність	<i>122 Комп'ютерні науки</i>
Освітня програма	<i>Системи і методи штучного інтелекту</i>
Статус дисципліни (код)	<i>Нормативна (ПО 18)</i>
Форма навчання	<i>очна(денна) Режим навчання: дистанційний / змішаний</i>
Рік підготовки, семестр	<i>1 курс, весняний семестр</i>
Обсяг дисципліни	<i>4 кредити ЄКТС</i> <i>Загальна кількість: 120 год.</i> <i>Лекційних занять: 36 год.</i> <i>Практичних занять: 36 год.</i> <i>Самостійна робота студентів: 48 год.</i>
Семестровий контроль/ контрольні заходи	<i>Залік</i>
Розклад занять	<i>Rozklad.kpi.ua</i>
Мова викладання	<i>Українська</i>
Інформація про керівника курсу / викладачів	<i>Лектор: к.ф.-м.н., Стусь Олександр Вікторович, Stus.Oleksandr@ill.kpi.ua</i> <i>Практичні: к.ф.-м.н., Стусь Олександр Вікторович</i>
Розміщення курсу	<i>Googleclassroom: <a href="https://classroom.google.com/c/NzAxNjQxMjgwMjUz?cjc=bwlvqn7">https://classroom.google.com/c/NzAxNjQxMjgwMjUz?cjc=bwlvqn7</a></i>

### Програма навчальної дисципліни

#### 1. Опис навчальної дисципліни, її мета, предмет вивчення та результати навчання

*Дана дисципліна є однією з фундаментальних в освітній програмі.*

*Предмет вивчення дисципліни становлять: булеві алгебри, алгебра предикатів та автоматичне доведення теорем, об'єкти, які, згідно тези Тьюрінга-Черча, дозволяють формалізувати поняття алгоритму: абстрактні алгоритмічні машини (машини Тьюрінга, нормальний алгоритм Маркова), рекурсивні функції та формальні граматики. Дисципліна також вивчає тісно пов'язані з формальними граmaticами формальні мови та абстрактні автомати згідно класифікації Н. Хомського.*

*У процесі навчання студент має оволодіти такими компетентностями: ЗК1 «Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу», ЗК6 «Здатність вчитися і оволодівати сучасними знаннями», ЗК11 «Здатність приймати обґрунтовані рішення», ФК1 «Здатність до математичного формулювання та досліджування неперервних та дискретних математичних моделей, обґрунтування вибору методів і підходів для розв'язування теоретичних і прикладних задач у галузі комп'ютерних наук, аналізу та інтерпретування».*

*По завершенню курсу студент має набути наступні програмні результати навчання: ПР2 «Використовувати сучасний математичний апарат неперервного та дискретного аналізу, лінійної алгебри, аналітичної геометрії, в професійній діяльності для розв'язання задач теоретичного та прикладного характеру в процесі проектування та реалізації об'єктів інформатизації».*

## **2. Пререквізити та постреквізити дисципліни (місце в структурно-логічній схемі навчання за відповідною освітньою програмою)**

*Дисципліна передує і забезпечує наступні навчальні дисципліни у програмі підготовки фахівця: «Вступ до інтелектуального аналізу даних» (ПО 10), «Основи системного аналізу» (ПО 12), «Комп'ютерна схемотехніка та архітектура комп'ютера» (ПО 22), «Дослідження операцій» (ПО 25), «Теорія прийняття рішень» (ПО 15). Вивчення курсу ґрунтується на широкому використанні основних результатів дисципліни «Дискретна математика» (ПО 4).*

## **3. Зміст навчальної дисципліни**

### **Розділ 1. Теорія алгоритмів**

#### **Тема 1.1. Абстрактні алгоритмічні машини. Теза Тьюрінга-Черча.**

*Ефективна обчислюваність функцій та загальне поняття алгоритму. Машина Тьюрінга. Нормальний алгоритм Маркова та їх зв'язок з машиною Тьюрінга. Універсальна машина Тьюрінга. Проблема зупинки.*

#### **Тема 1.2. Елементи теорії обчислювальних функцій.**

*Примітивно-рекурсивні функції. Частково-рекурсивні функції. Теза Черча.*

### **Розділ 2. Булеві алгебри.**

#### **Тема 2.1. Основні визначення та теореми теорії булевих алгебр.**

*Означення абстрактної булевої алгебри. Основні тотожності. Булева алгебра як ідемпотентне кільце. Скінчені булеві алгебри. Реалізація скінченної булевої алгебри у вигляді алгебри множин.*

#### **Тема 2.2. Диз'юнктивні та кон'юнктивні нормальні форми. Мінімізація булевих виразів.**

*Диз'юнктивні та кон'юнктивні нормальні форми. Теорема про існування та єдиність. Геометричні методи мінімізації диз'юнктивних нормальних форм: карти Карно та діаграми Вейча. Поняття про алгебричні методи мінімізації.*

#### **Тема 2.3. Основні функціонально замкнені класи.**

#### **Тема 2.4. Функціональна повнота набору булевих функцій.**

*Основні функціонально замкнені класи булевих функцій. Теорема Поста про функціональну повноту*

### **Розділ 3. Алгебра предикатів.**

#### **Тема 3.1. Основні визначення та властивості алгебри предикатів.**

*Означення та поняття інтерпретації формули алгебри предикатів. Приклади загальнозначущих формул в алгебрі предикатів.*

*Логічний наслідок та логічна еквівалентність в алгебрі предикатів. Застосування до розв'язання логічних задач «природної мови».*

### **Розділ 4. Автоматичне доведення теорем.**

#### **Тема 4.1. Скулемівські стандартні форми. Н-інтерпретації.**

*Попередні нормальні форми. Скулемівські стандартні форми. Означення Н-інтерпретації. Теорема про суперечливість множини диз'юнктивів, що суперечлива на кожній Н-інтерпретації.*

#### **Тема 4.2. Семантичні дерева. Теорема Ербрана.**

*Означення семантичного дерева. Теорема Ербрана (два формулювання).*

#### **Тема 4.3. Метод резолюцій. Математичні основи мови Пролог.**

*Метод резолюцій для алгебри висловлень. Уніфікація виразів алгебри предикатів. Метод резолюцій для алгебри предикатів. Повнота методу резолюцій. Стратегії насичення рівня та викреслення. Хорнівські диз'юнкти. Математичні основи мови логічного програмування Prolog.*

### **Розділ 5. Елементи теорії автоматів та формальних мов.**

#### **Тема 5.1. Поняття формальної мови та формальної граматики. Ієрархія Хомського.**

*Основні поняття теорії формальних мов та формальних граматик. Ієрархія Хомського.*

### Тема 5.2. Скінченні автомати.

Абстрактні автомати. Автомати Мілі та Мура. Методи задання автоматів. Цифрові автомати. Теорема Глушкова про структурну повноту (без доведення). Зв'язок скінченних автоматів з регулярними граматиками.

### Тема 5.3. Автомати із стековою пам'яттю.

А Автомати із стековою пам'яттю: визначення та породжувані формальні мови.

## 4. Навчальні матеріали та ресурси

Базова:

1. Спекторський І.Я., Стусь О.В. Дискретна математика: частково впорядковані множини, решітки, булеві алгебри : навч. посіб. Київ: НТУУ «КПІ», 2009. 140 с.
2. Стусь О.В. Математична логіка та теорія алгоритмів: лекції: навч. посіб. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2017. 150 с. : URL: <http://ela.kpi.ua/handle/123456789/21581>.
3. Спекторський І.Я., Статкевич В.М. Формальні мови та автомати: підручник. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, вид-во «Політехніка», 2020. 168 с.
4. Дискретна математика: розрахункові роботи. /уклад.: І.Я. Спекторський, О.В. Стусь, В.М. Статкевич. Київ: НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського», 2017. 84 с. URL: <http://ela.kpi.ua/handle/123456789/21589>
5. Спекторський І.Я., Стусь О.В., Статкевич В.М. Дискретна математика. Збірник задач: навч. посіб. Київ: НТУУ «КПІ», 2015. 103 с. URL: <http://ela.kpi.ua/handle/123456789/11562>

Додаткова:

6. Elliot Mendelson. Introduction to Mathematical Logic, fourth ed. London: Chapman & Hall, 1997. 447 p.
7. Chin-Liang Chang, Richard Char-Tung Lee. Symbolic logic and mechanical theorem proving. New York, San Francisco, London: Academic press, 1973. 331 p.
8. Бондаренко М.Ф., Білоус Н.В., Руткас А.Г. Дискретна математика. Харків: «Компанія СМІТ», 2004. 480 с.
9. Таран Т.А. Основы дискретной математики. Київ: Просвіта, 2003. 288 с.
10. Таран Т.А., Миценко Н.А., Темнікова О.Л. Збірник задач з дискретної математики. К.: Інрес, 2005. 64 с.
11. Основы дискретной математики / Капітонова Ю.В. та інші. Київ: Наукова думка, 2002. 582 с.
12. Ющенко К., Суржко Л., Цейтлін Г., Шевченко А. Алгоритмічні алгебри. Київ: ІЗМН, 1997. 480 с.

## Навчальний контент

### 5. Методика опанування навчальної дисципліни(освітнього компонента)

#### Лекційні заняття

№	Назва теми лекції та перелік основних питань
1	<b>Алгоритмічні машини.</b> Ефективна обчислюванність функцій та загальне поняття алгоритму. Машина Тьюрінга. Література. [2], с. 9-19.
2	<b>Алгоритмічні машини.</b> Нормальний алгоритм Маркова. Зв'язок між машиною Тьюрінга та нормальним алгоритмом Маркова. Універсальна машина Тьюрінга. Проблема зупинки. Література. [2], с. 19-25, 33-35.
3	<b>Елементи теорії обчислювальних функцій.</b> Примітивно-рекурсивні функції. Частково-рекурсивні функції. Теза Черча. Література. [2], с. 36-44.

4	<b>Основні визначення та теореми теорії булевих алгебр.</b> Означення абстрактної булевої алгебри. Основні тотожності. Скінченні булеві алгебри. Булева алгебра та ідемпотентне кільце. Література. [1], с. 53-71.
5	<b>Диз'юнктивні та кон'юнктивні нормальні форми.</b> Диз'юнктивні та кон'юнктивні нормальні форми. Теорема про існування та єдиність. Література. [1], с. 72-84.
6	<b>Мінімізація булевих виразів.</b> Геометричні методи мінімізації диз'юнктивних нормальних форм: карти Карно та діаграми Вейча. Поняття про алгебричні методи мінімізації. Література. [1], с. 85-108.
7	<b>Функціональна повнота набору булевих функцій.</b> Поняття булевої функції, замикання класу булевих функцій, функціональна повнота. Основні функціонально замкнені класи булевих функцій. Література. [1], с. 109-120.
8	<b>Функціональна повнота набору булевих функцій.</b> Основні функціонально замкнені класи булевих функцій. Теорема Поста про функціональну повноту. Література. [1], с. 121-134.
9	<b>Основні визначення та властивості алгебри предикатів.</b> Означення предикату. Означення формули та поняття інтерпретації формули алгебри предикатів. Література. [2], с. 66-73.
10	<b>Основні визначення та властивості алгебри предикатів.</b> Приклади загальнозначущих формул в алгебрі предикатів. Логічний наслідок та логічна еквівалентність в алгебрі предикатів. Література. [2], с. 74-80.
11	<b>Скулемівські стандартні форми. Н-інтерпретації.</b> Попередні нормальні форми. Скулемівські стандартні форми. Означення Н-інтерпретації. Теорема про Н-інтерпретації. Література. [2], с. 88-99.
12	<b>Семантичні дерева. Теорема Ербрана.</b> Означення семантичного дерева. Теорема Ербрана (два формулювання). Література. [2], с. 100-108.
13	<b>Метод резолюцій.</b> Метод резолюцій для алгебри висловлень. Уніфікація виразів алгебри предикатів. Найбільший спільний уніфікатор. Література. [2], с. 109-114.
14	<b>Метод резолюцій.</b> Метод резолюцій для алгебри предикатів. Теорема про повноту метода резолюцій (схема доведення). Стратегії насичення рівня та викреслення. Хорнівські диз'юнкти. Математичні основи мови логічного програмування Prolog. Література. [2], с. 115-127.
15	<b>Поняття формальної мови та формальної граматики. Ієрархія Хомського.</b> Основні поняття теорії формальних мов та формальних граматик. Ієрархія Хомського. Література. [3], с. 7-20.
16	<b>Скінченні автомати.</b> Скінченні автомати як розпізнавачі слів. Зв'язок з регулярними граматами. Література. [3], с. 35-54.
17	<b>Скінченні автомати.</b> Властивості регулярних мов. Лема про розростання. Регулярні вирази. Література. [3], с. 86-103.
18	<b>А Автомати із стековою пам'яттю.</b> Властивості КВ-мов. Автомати із стековою пам'яттю: визначення та приклади. Література. [3], с. 115-150.

## Практичні заняття

№	Назва теми занять
1	Машина Тьюрінга.
2	Нормальний алгоритм Маркова. Зв'язок між машиною Тьюрінга та нормальним алгоритмом Маркова.
3	Примітивно-рекурсивні функції. Частково-рекурсивні функції
4	Основні тотожності абстрактної булевої алгебри. Скінчені булеві алгебри. Реалізація скінченної булевої алгебри у вигляді алгебри множин.
5	Диз'юнктивні та кон'юнктивні нормальні форми.
6	Мінімізація диз'юнктивних нормальних форм за допомогою карти Карно та діаграм Вейча.
7	Алгебричні методи мінімізації ДНФ. Поняття функціонального замикання та повноти класів булевих функцій.
8	Основні функціонально замкнені класи булевих функцій. Теорема Поста про функціональну повноту.
9	МКР (частина 1)
10	Інтерпретації формули алгебри предикатів. Доведення загальнозначимості формул в алгебрі предикатів.
11	Логічний наслідок та логічна еквівалентність в алгебрі предикатів. Розв'язання логічних задач «природної мови».
12	Попередні нормальні форми. Скулемівські стандартні форми. Побудова ербранівського універсуму та ербранівського базису. Доведення суперечливості множини диз'юнктив побудовою семантичного дерева (застосування теореми Ербрана).
13	Метод резолюцій для алгебри висловлень. Уніфікація виразів алгебри предикатів. Метод резолюцій для алгебри предикатів. Математичні основи мови Prolog.
14	Основні поняття теорії формальних мов та формальних граматик. Ієрархія Хомського. Операції над формальними мовами. Розпізнавання контекстно-вільних та регулярних мов.
15	Скінченні автомати як розпізнавачі слів: зв'язок з регулярними граматиками, детерміновані та недетерміновані автомати.
16	Побудова автоматів із стековою пам'яттю.
17	МКР (частина 2)
18	Залік

### 6. Самостійна робота здобувача вищої освіти

Самостійна робота здобувача складається з виконання розрахункової роботи, яка складається з трьох частин (частина 1 – Машина Тьюрінга, що відповідає розділу 1, частина 2 – Булеві вирази та булеві функції відповідає розділу 2, частина 3 – Автоматичне доведення теорем та теорія автоматів відповідає розділам 4 та 5). Розрахункова робота сприяє поглибленому засвоєнню методів розв'язання задач з курсу математичної логіки та теорії алгоритмів. Методичні рекомендації до виконання індивідуального завдання, варіанти завдань, термін виконання надає лектор всім групам потоку та зазначає у гугл-класі. Викладачі, які ведуть практичні заняття, у двотижневий термін з призначеної дати здачі студентами робіт, перевіряють роботи та виставляють рейтингові бали.

## Політика та контроль

### 7. Політика навчальної дисципліни (освітнього компонента)

Здобувачі вищої освіти не мають право пропускати лекційні та практичні заняття без поважних причин. На кожному практичному занятті повинні активно залучатися до розв'язання практичних задач, бажано за фахом. Для цього викладач на кожній лекції повинен приділяти увагу до застосування прочитаних тем в різних галузях науки. Захист розрахункової роботи повинен виявити наскільки здобувач може не тільки абстрактно та логічно мислити, а й аналізувати результат. Усі роботи здобувачів мають прикріплюватися в особистому кабінеті гугл-класу. Терміни здачі кожного завдання позначені в щотижневих завданнях у гугл-

класі. Розрахункова робота, контрольні та залікові роботи мають бути виконані студентами з дотриманням академічної доброчесності.

## 8. Види контролю та рейтингова система оцінювання результатів навчання (PCO)

Семестровий контроль: залік

1. Семестровий рейтинг з дисципліни «Математична логіка та теорія алгоритмів» складається з рейтингових балів (див. табл.1), і не перевищує  $R_{\max} = 100$ .

Таблиця 1. Система рейтингових балів.

№	Контрольний захід	Бал
1.	Розрахункова робота частина 1	20
2.	Розрахункова робота частина 2	20
3.	Розрахункова робота частина 3	15
4.	Модульна контрольна робота частина 1	25
5.	Модульна контрольна робота частина 2	20

2. Розрахункова робота зараховується тільки за умови її захисту студентом.
3. Для захисту кожної розрахункової роботи студенту надається не більше п'яти спроб.
4. За невдалі спроби захисту кожної розрахункової нараховуються штрафні бали згідно табл.2, у залежності від кількості невдалих спроб захисту даної розрахункової роботи.

Таблиця 2. Система штрафних балів.

Кількість невдалих спроб	Штрафні бали
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5

5. Студент допускається до заліку при виконанні двох умов:
  - поточний рейтинг не нижче ніж 50;
  - усі розрахункові роботи є зарахованими.
6. У разі, якщо поточний рейтинг студента становить 60 балів або вище, він має право, не складаючи залік, отримати оцінку «автоматом», відповідно до поточного рейтингу, згідно табл.4.
7. У разі, якщо поточний рейтинг студента 60 балів або вище, він також має право скласти залік в повному обсязі з метою підвищення семестрової оцінки. У цьому випадку виставляється найбільша серед оцінок, отриманих на заліку і підрахованої за набраними балами.
8. У разі, якщо рейтинговий бал студента становить від 50 до 59, цей бал скасовується і студент повинен скласти залік у повному обсязі. Семестрова оцінка виставляється за результатом заліку.
9. На заліку студенту пропонуються два теоретичні питання по 25 балів кожне та дві задачі по 25 балів кожна, які оцінюються згідно табл. 3.

**Таблиця 3. Критерії оцінювання теоретичного питання/задачі.**

<b>Критерій</b>	<b>Бали</b>
Наявні всі формулювання, всі доведення повні та чіткі/ розв'язання задачі повне та відповідь правильна	25
Наявні всі формулювання, в доведеннях наявні одна чи декілька некритичних помилок/розв'язання задачі повне, але остаточна відповідь відсутня або присутні помилки лише арифметичного характеру	20
Наявні всі формулювання з некритичними помилками, доведення неповні (наявна лише частина доведення)/ розв'язання задачі неповне (наявна лише частина повної відповіді або відсутній важливий крок)	15
Наявні основні формулювання/намічено правильний хід розв'язання, але допущено грубі помилки	5
Відсутність основних формулювань/відсутність правильного ходу розв'язання задачі	0

**Таблиця 4. Відповідність між рейтингом і заліковою оцінкою.**

<b>Рейтинг</b>	<b>Традиційна оцінка</b>
$95 \leq RD \leq 100$	відмінно
$85 \leq RD \leq 94$	дуже добре
$75 \leq RD \leq 84$	добре
$65 \leq RD \leq 74$	задовільно
$60 \leq RD \leq 64$	достатньо
$50 \leq RD \leq 59$	незадовільно
$0 \leq RD \leq 49$	незадовільно (потрібна додаткова робота)

## 10. Додаткова інформація з дисципліни (освітнього компонента)

Теоретичні питання:

1. Опис та робота машини Тьюрінга.
2. Проблема зупинки машини Тьюрінга.
3. Опис та робота нормального алгоритму Маркова.
4. Еквівалентність машини Тьюрінга та нормального алгоритму Маркова.
5. Схема примітивної рекурсії. Примітивно рекурсивні функції.
6. Оператор мінімізації. Частково та загально рекурсивні функції.
7. Ефективна обчислюваність числових функцій. Теза Тьюрінга-Черча.
8. Поняття булевої алгебри.
9. Булева алгебра та ідемпотентне кільце (взаємний зв'язок).
10. Поняття булевого виразу. ДНФ та ДДНФ. КНФ та ДКНФ.
11. Мінімізація ДНФ. Поняття скороченої та тупикової ДНФ.
12. Побудова тупикових ДНФ за допомогою карт Карно та методом Петріка.
13. Методи побудови скорочених ДНФ (метод Квайна, метод Блейка, метод Нельсона).
14. Поняття булевої функції. Поняття замикання набору булевих функцій.
15. Поняття замкнутого та повного набору булевих функцій.
16. Основні функціонально замкнуті класи булевих функцій.
17. Теорема Поста (критерій функціональної повноти).
18. Поняття предиката. Означення кванторів.
19. Побудова формули в алгебрі предикатів.
20. Інтерпретації формул в алгебрі предикатів. Означення логічно загальнозначущої формули.

21. Логічний наслідок в алгебрі предикатів. Теорема дедукції.
22. Попередня нормальна та скулемівська стандартна форма.
23. Порожній диз'юнкт. Суперечність множини диз'юнктив.
24. Побудова  $N$ -інтерпретацій. Теорема про  $N$ -інтерпретації.
25. Метод семантичних дерев. Теорема Ербрана I та II формулювання.
26. Метод резолюцій. Лема про резолюцію.
27. Уніфікатор. Найбільший спільний уніфікатор.
28. Бінарна резольвента. Загальне означення резольвенти.
29. Повнота методу резолюцій.
30. Формальні мови. Основні поняття.
31. Формальні граматики. Класифікація формальних граматик за Н. Хомським.
32. Детерміновані та недетерміновані автомати-розпізнавачі та зв'язок між ними.
33. Властивості регулярних мов. Теорема про розростання для регулярних мов.
34. Регулярні вирази.
35. КВ-граматики та їх властивості.
36. МП-автомати як розпізнавачі для КВ-мов.

**Робочу програму навчальної дисципліни (силабус):**

Складено *к.ф.-м.н., Стусь Олександр Вікторович*

Ухвалено кафедрою ММСА (протокол № 13 від 05.06.2024)

Погоджено Методичною комісією НН ІПСА (протокол № 10 від 24.06.2024)