

#### 4. Навчальні матеріали та ресурси



Національний технічний університет України  
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ  
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»



Кафедра математичних  
методів системного аналізу

# ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА

## Робоча програма навчальної дисципліни (Силабус)

### Реквізити навчальної дисципліни

Рівень вищої освіти	<i>Перший (бакалаврський)</i>
Галузь знань	<i>12 Інформаційні технології</i>
Спеціальність	<i>122 Комп'ютерні науки</i>
Освітня програма	<i>Системи і методи штучного інтелекту</i>
Статус дисципліни (код)	<i>Нормативна (ПО 4)</i>
Форма навчання	<i>очна(денна) Режим навчання: дистанційний / змішаний</i>
Рік підготовки, семестр	<i>1 курс, осінній семестр</i>
Обсяг дисципліни	<i>5 кредитів ЄКТС Загальна кількість: 150 год. Лекційних занять: 36 год. Практичних занять: 36 год. Самостійна робота студентів: 78 год.</i>
Семестровий контроль/ контрольні заходи	<i>Екзамен</i>
Розклад занять	<i>Rozklad.kpi.ua</i>
Мова викладання	<i>Українська</i>
Інформація про керівника курсу / викладачів	<i>Лектор: к.ф.-м.н., Стусь Олександр Вікторович, Stus.Oleksandr@iit.kpi.ua Практичні: к.ф.-м.н., Стусь Олександр Вікторович</i>
Розміщення курсу	<i>Googleclassroom: <a href="https://classroom.google.com/c/NzAxNjQxNTM3MTcz?cjc=clv2dfy">https://classroom.google.com/c/NzAxNjQxNTM3MTcz?cjc=clv2dfy</a></i>

### Програма навчальної дисципліни

#### 1. Опис навчальної дисципліни, її мета, предмет вивчення та результати навчання

**Дана дисципліна є однією з фундаментальних в освітній програмі.**

Предмет вивчення дисципліни становлять, головним чином, дискретні об'єкти (висловлення, графи, комбінаторика), а також об'єкти, що тісно пов'язані з дискретними системами, і тому їх останнім часом традиційно відносять до дискретної математики (множини, відношення, групи та кільця).

**У процесі навчання студент має оволодіти такими компетентностями:** ЗК1 «Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу», ЗК6 «Здатність вчитися і оволодівати сучасними знаннями», ЗК11 «Здатність приймати обґрунтовані рішення», ФК1 «Здатність до математичного формулювання та досліджування неперервних та дискретних математичних моделей, обґрунтування вибору методів і підходів для розв'язування теоретичних і прикладних задач у галузі комп'ютерних наук, аналізу та інтерпретування», ФК3 «Здатність до логічного мислення, побудови логічних висновків, використання формальних мов і моделей алгоритмічних обчислень, проектування, розроблення й аналізу алгоритмів, оцінювання їх ефективності та складності, розв'язності та нерозв'язності алгоритмічних проблем для адекватного моделювання предметних областей і створення програмних та інформаційних систем».

**По завершенню курсу студент має набутти наступні програмні результати навчання:** ПР2 «Використовувати сучасний математичний апарат неперервного та дискретного аналізу, лінійної алгебри, аналітичної геометрії, в професійній діяльності для розв'язання задач теоретичного та прикладного характеру в процесі проектування та реалізації об'єктів інформатизації».

## **2. Пререквізити та постреквізити дисципліни (місце в структурно-логічній схемі навчання за відповідною освітньою програмою)**

*Дисципліна передує і забезпечує наступні навчальні дисципліни у програмі підготовки фахівця: «Математична логіка та теорія алгоритмів» (ПО 19), «Теорія ймовірностей» (ПО 14), «Вступ до інтелектуального аналізу даних» (ПО 10), «Основи системного аналізу» (ПО 12), «Комп'ютерна схемотехніка та архітектура комп'ютера» (ПО 22), «Дослідження операцій» (ПО 25), «Теорія прийняття рішень» (ПО 15)*

## **3. Зміст навчальної дисципліни**

### **Розділ 1. Алгебра висловлень.**

**Тема 1.1. Основні поняття та закони алгебри висловлень. Принцип дуальності. Логічний наслідок та логічна еквівалентність.**

*Основні поняття алгебри висловлень. Операції над висловленнями. Закони алгебри висловлень. Принцип дуальності. Узагальнений закон де Моргана. Логічний наслідок та логічна еквівалентність. Теорема дедукції для алгебри висловлень. Формалізація «природної мови».*

### **Розділ 2. Алгебра множин.**

**Тема 2.1. Основні операції над множинами та закони алгебри множин. Потужність скінченної множини.**

*Основні поняття теорії множин. Закони алгебри множин. Доведення тотожностей в алгебрі множин. Декартовий добуток множин. Алгебра множин як алгебрична структура. Поняття про кільце множин.*

### **Розділ 3. Елементи теорії відношень.**

**Тема 3.1. Основні поняття теорії відношень. Операції над відношеннями.**

*Основні поняття теорії відношень. Методи задання відношень. Операції над відношеннями.*

**Тема 3.2. Властивості бінарних відношень. Відношення еквівалентності та порядку.**

*Відношення еквівалентності та відношення порядку. Поняття про фактор-множину. Функціональні відношення. Функція як частковий випадок відношення.*

### **Розділ 4. Елементи комбінаторики.**

**Тема 4.1. Основні принципи комбінаторики та основні комбінаторні схеми.**

*Основні принципи комбінаторики. Переставлення з повтореннями та без повторень. Комбінації з повтореннями та без повторень. Впорядковані розбиття. Властивості біноміальних коефіцієнтів. Трикутник Паскаля. Біноміальна та поліноміальна формули.*

### **Розділ 5. Елементи теорії груп та кілець**

**Тема 5.1. Поняття групи. Приклади груп.**

*Загальні означення теорії алгебричних структур з однією бінарною операцією. Теореми про єдиність нейтрального та зворотного елементів. Основні властивості груп. Група підстановок. Адитивні та мультиплікативні групи класів лишків.*

**Тема 5.2. Підгрупи. Циклічні групи. Групи класів лишків. Фактор групи та теорема про гомоморфізми.**

*Підгрупи. Критерій підгрупи. Гомоморфізми груп. Циклічні групи. Суміжні класи. Нормальні підгрупи. Теорема Лагранжа для скінченних груп.*

*Визначення фактор-групи. Основні теореми про ядро та образ гомоморфізму. Теорема про гомоморфізми для груп.*

**Тема 5.3. Кільця. Основні поняття. Кільця з одиницею.**

*Основні поняття теорії кілець. Кільця з одиницею. Поняття області цілісності та поля.*

### **Розділ 6. Елементи теорії графів.**

**Тема 6.1. Основні поняття теорії графів. Ейлерові та гамільтонові графи.**

*Основні визначення теорії графів. Теорема про степені вершин графа. Поняття ейлерових та напівейлерових графів. Критерій ейлеровості та напівейлеровості. Поняття гамільтонових та напівгамільтонових графів. Деякі необхідні та деякі достатні умови гамільтоновості та напівгамільтоновості (без доведення). Поняття про тета-графи.*

**Тема 6.2. Планарні графи. Деякі спеціальні типи графів.**

*Ізоморфізм та гомеоморфізм графів. Визначення плоских та планарних графів. Формула Ейлера для плоских графів. Теорема Понтрягіна-Куратовського (без доведення).*

*Поняття про деякі спеціальні типи графів: регулярні графи, дводольні графи, мічені графи (мережі), дерева.*

*Теорема Кеніга про дводольні графи. Дуальність графів. Теорема про степені граней графа.*

*Фарбування вершин та граней графа. Теорема про чотири кольори (без доведення). Теорема про еквівалентність дводольності та двокольоровості. Поняття про орієнтовані графи.*

**Тема 6.3. Алгоритми на графах.**

Пошук в ширину, пошук в глибину. Побудова остовів мінімальної ваги (алгоритми Прима та Краскала). Пошук мінімальних відстаней в мережах (алгоритми Дейкстри та Флойда). Топологічне сортування. Бінарні дерева.

#### 4. Навчальні матеріали та ресурси

Базова:

1. Спекторський І.Я. Дискретна математика: навч. посіб. / КПІ. Київ: ІВЦ «Політехніка», 2004. 220 с.
2. Дискретна математика: розрахункові роботи. /уклад.: І.Я. Спекторський, О.В. Стусь, В.М. Статкевич. Київ: НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського», 2017. 84 с. URL: <http://ela.kpi.ua/handle/123456789/21589>
3. Спекторський І.Я., Стусь О.В., Статкевич В.М. Дискретна математика. Збірник задач: навч. посіб. Київ: НТУУ «КПІ», 2015. 103 с. URL: <http://ela.kpi.ua/handle/123456789/11562>
4. Єжов І.І, Скороход А.В., Ядренко М.Й. Елементи комбінаторики. Київ: Вища школа, 1972. 84 с.
5. Завало С.Т. Курс алгебри. Київ: Вища школа, 1985. 503 с.
6. Бондаренко М.Ф., Білоус Н.В., Руткас А.Г. Дискретна математика. Харків: «Компанія СМІТ», 2004. 480 с.

Додаткова:

7. Elliot Mendelson. Introduction to Mathematical Logic, fourth ed. London: Chapman & Hall, 1997. 447 p.
8. Основи дискретної математики / Капітонова Ю.В. та інші. Київ: Наукова думка, 2002. 582 с.

### Навчальний контент

#### 5. Методика опанування навчальної дисципліни(освітнього компонента)

##### Лекційні заняття

№	Назва теми лекції та перелік основних питань
1	<b>Алгебра висловлень.</b> Основні поняття алгебри висловлень. Операції над висловленнями. Закони алгебри висловлень. Принцип дуальності. Узагальнений закон де Моргана. Логічний наслідок та логічна еквівалентність. Теорема дедукції для алгебри висловлень. Формалізація «природної мови». Література. [1], с. 7-18.
2	<b>Теорія множин.</b> Основні поняття теорії множин. Закони алгебри множин. Доведення тотожностей в алгебрі множин. Література. [1], с. 19-25.
3	<b>Теорія множин.</b> Потужність скінченної множини. Декартовий добуток множин. Алгебра та кільце множин. Література. [1], с. 26-32.
4	<b>Теорія відношень.</b> Основні поняття теорії відношень. Методи задання відношень. Операції над відношеннями. Література. [1], с. 33-40.
5	<b>Властивості бінарних відношень. Відношення еквівалентності та порядку.</b> Властивості бінарних відношень. Транзитивне замикання. Відношення еквівалентності та відношення порядку. Література. [1], с. 41-48.
6	<b>Фактор-множина. Функція як частинний випадок відношення.</b> Поняття про фактор-множину. Функціональні відношення. Функція як частковий випадок відношення. Література. [1], с. 49-56.
7	<b>Основні принципи комбінаторики та основні комбінаторні схеми.</b> Основні принципи комбінаторики. Переставлення з повтореннями та без повторень. Комбінації з повтореннями та без повторень. Впорядковані розбиття. Властивості біноміальних коефіцієнтів. Трикутник Паскаля. Біноміальна та поліноміальна формули. Література. [1], с. 57-69..

8	<b>Поняття групи.</b> Загальні означення теорії алгебричних структур з однією бінарною операцією. Теорема про єдиність нейтрального та зворотного елементів. Основні властивості груп. Література. [1], с. 106-112.
9	<b>Групи підстановок.</b> Група підстановок. Парні та непарні підстановки Література. [1], с. 113-131.
10	<b>Групи класів лишків. Підгрупи. Гомоморфізми груп. Циклічні групи.</b> Групи класів лишків. Підгрупи. Критерій підгрупи. Гомоморфізми груп. Циклічні групи. Суміжні класи. Теорема Лагранжа для скінчених груп. Нормальні підгрупи. Література. [1], с. 132-156.
11	<b>Фактор-групи та теорема про гомоморфізми.</b> Визначення фактор-групи. Основні теореми про ядро та образ гомоморфізму. Теорема про гомоморфізми для груп. Література. [1], с. 157-176.
12	<b>Кільця. Основні поняття.</b> Означення кільця. Приклади та основні властивості кілець. Література. [1], с. 177-182.
13	<b>Кільця з одиницею.</b> Дільники нуля. Кільця з одиницею. Поняття області цілісності та поля. Ідемпотентні кільця. Література. [1], с. 183-190, 208-209.
14	<b>Основні поняття теорії графів.</b> Основні визначення теорії графів. Степені вершин графа. Зв'язні графи, компоненти зв'язності. Література. [1], с. 70-76.
15	<b>Ейлерові та гамільтонові графи.</b> Поняття ейлерових та напівейлерових графів. Поняття гамільтонових та напівгамільтонових графів. Ізоморфізм та гомеоморфізм графів. Література. [1], с. 77-83.
16	<b>Планарні графи. Деякі спеціальні типи графів.</b> Поняття про деякі спеціальні типи графів: регулярні графи, дводольні графи, мічені графи (мережі), дерева. Визначення плоских та планарних графів. Формула Ейлера для плоских графів. Теорема Понтрягіна-Куратовського (без доведення). Фарбування вершин та граней графа. Література. [1], с. 84-105.
17	<b>Алгоритми на графах.</b> Пошук в ширину, пошук в глибину. Побудова остовів мінімальної ваги (алгоритми Прима та Краскала). Література. [5], с. 275-285.
18	<b>Алгоритми на графах.</b> Пошук мінімальних відстаней в мережах (алгоритми Дейкстри та Флойда). Топологічне сортування. Бінарні дерева. Література. [5], с. 281 – 285, 292-303.

## Практичні заняття

№	Назва теми занять
1	Операції над висловленнями. Закони алгебри висловлень.
2	Логічний наслідок та логічна еквівалентність. Теорема дедуції для алгебри висловлень. Формалізація «природної мови».
3	Закони алгебри множин. Доведення тотожностей в алгебрі множин.
4	Розв'язок систем рівнянь в алгебрі множин.
5	Декартовий добуток множин.
6	Методи задання відношень. Операції над відношеннями. Функціональні відношення.
7	Властивості бінарних відношень. Транзитивне замикання.
8	Відношення еквівалентності та відношення порядку. Фактор-множина.
9	МКР (частина 1)
10	Основні принципи комбінаторики. Розміщення з повтореннями та без повторень. Перестановки. Комбінації з повтореннями та без повторень.
11	Упорядковані розбиття. Властивості біноміальних коефіцієнтів. Біноміальна та поліноміальна формули. Розв'язання комбінаторних задач за допомогою кореневих дерев.
12	Загальні означення теорії алгебричних структур з однією бінарною операцією. Основні властивості груп. Група підстановок. Групи класів лишків.
13	Підгрупи. Критерій підгрупи. Гомоморфізми груп. Циклічні групи. Теорема Лагранжа для скінчених груп. Визначення фактор-групи. Теорема про гомоморфізми для груп.
14	Основні поняття теорії кілець. Кільця з одиницею, дільники нуля, мультиплікативна група кільця.
15	Теорема про степені вершин графа. Критерій ейлеровості та напівейлеровості. Достатні умови гамільтоновості та напівгамільтоновості.
16	Формула Ейлера для плоских графів. Теорема Понтрягіна-Куратовського. Теорема Кенига про двудольні графи. Дуальність графів. Теорема про степені граней графа. Фарбування вершин та граней графа.
17	Пошук в глибину та в ширину. Пошук остовів мінімальної ваги в зважених графах, пошук мінімальних відстаней в мережах. Топологічне сортування. Операції над бінарними деревами, процедура збалансування.
18	МКР (частина 2)

### 6. Самостійна робота здобувача вищої освіти

Самостійна робота здобувача складається з виконання індивідуального завдання для перевірки засвоєння матеріалу, яке складається з трьох частин (частина 1 – Теорія множин та теорія відношень відповідає розділам 2 та 3, частина 2 – Комбінаторика відповідає розділу 4, частина 3 – Елементи теорії груп та кілець відповідає розділу 5). Індивідуальне завдання сприяє поглибленому засвоєнню методів розв'язання задач з курсу дискретної математики. Методичні рекомендації до виконання індивідуального завдання, варіанти завдань, термін виконання надає лектор всім групам потоку та зазначає у гугл-класі. Викладачі, які ведуть практичні заняття, у двотижневий термін з призначеної дати здачі студентами робіт, перевіряють роботи та виставляють рейтингові бали.

### Політика та контроль

#### 7. Політика навчальної дисципліни (освітнього компонента)

Здобувачі вищої освіти не мають право пропускати лекційні та практичні заняття без поважних причин. На кожному практичному занятті повинні активно залучатися до розв'язання практичних задач, бажано за фахом. Для цього викладач на кожній лекції повинен приділяти увагу до застосування прочитаних тем в різних галузях науки. Захист індивідуального завдання повинен виявити наскільки здобувач може не тільки абстрактно та

логічно мислити, а й аналізувати результат. Усі роботи здобувачів мають прикріплювати в особистому кабінеті гугл-класу. Терміни здачі кожного завдання позначені в щотижневих завданнях у гугл-класі. Індивідуальне завдання, контрольні та екзаменаційні роботи мають бути виконані студентами з дотриманням академічної доброчесності.

## 8. Види контролю та рейтингова система оцінювання результатів навчання (PCO)

Семестровий контроль: екзамен

1. Семестровий рейтинг з дисципліни «Дискретна математика» складається з рейтингових балів (див. табл.1), і не перевищує  $R_{\max} = 100$ . У семестрі здобувач може набрати 60 балів, відповідно на іспиті – 40 балів.

Таблиця 1. Система рейтингових балів.

№		Контрольний захід	Бал
1.	$R_c$	Індивідуальне завдання частина 1	10
2.		Індивідуальне завдання частина 2	10
3.		Індивідуальне завдання частина 3	10
4.		Модульна контрольна робота частина 1	15
5.		Модульна контрольна робота частина 2	15
6.	$R_e$	Відповідь на екзамені	40

- Індивідуальне завдання зараховується тільки за умови його захисту студентом.
- Для захисту кожної частини індивідуального завдання студенту надається не більше п'яти спроб.
- За невдалі спроби захисту кожної частини індивідуального завдання нараховуються штрафні бали згідно табл. Ошибка! Источник ссылки не найден., у залежності від кількості невдалих спроб захисту.

Таблиця 2. Система штрафних балів.

Кількість невдалих спроб	Штрафні бали
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5

- Студент допускається до іспиту при виконанні двох умов:
  - семестрова складова  $R_c$  не нижче ніж 30 балів;
  - усі три частини індивідуального завдання є зарахованими.
- За роботу протягом семестру (активна робота в аудиторії, вчасний захист розрахункових робіт) студент може отримати не більше 5 заохочувальних додаткових балів.
- На іспиті студенту пропонуються два теоретичні питання по 10 балів кожне та дві задачі по 10 балів кожна, які оцінюються згідно табл. 3.

Таблиця 2. Критерії оцінювання теоретичного питання/задачі.

Критерій	Бали
Наявні всі формулювання, всі доведення повні та чіткі/ розв'язання задачі повне та відповідь правильна	10
Наявні всі формулювання, в доведеннях наявні одна чи декілька некритичних помилок/розв'язання задачі повне, але остаточна відповідь відсутня або присутні помилки лише арифметичного характеру	8
Наявні всі формулювання з некритичними помилками, доведення неповні (наявна лише частина доведення)/ розв'язання задачі неповне (наявна лише частина повної відповіді або відсутній важливий крок)	6
Наявні основні формулювання/намічено правильний хід розв'язання, але допущено грубі помилки	2
Відсутність основних формулювань/відсутність правильного ходу розв'язання задачі	0

8. Рейтингова оцінка  $RD = R_c + R_e$  з кредитного модуля переводиться в оцінку ECTS та традиційну «чотирибальну» оцінку згідно табл. 4.

**Таблиця 4. Відповідність між рейтингом і екзаменаційною оцінкою.**

<i>Рейтинг</i>	<i>Оцінка ECTS</i>	<i>Традиційна оцінка</i>
$95 \leq RD \leq 100$	<i>A — відмінно</i>	<i>Відмінно</i>
$85 \leq RD \leq 94$	<i>B — дуже добре</i>	<i>Добре</i>
$75 \leq RD \leq 84$	<i>C — добре</i>	
$65 \leq RD \leq 74$	<i>D — задовільно</i>	<i>Задовільно</i>
$60 \leq RD \leq 64$	<i>E — достатньо</i>	
$50 \leq RD \leq 59$	<i>FX — незадовільно</i>	<i>Незадовільно</i>
$0 \leq RD \leq 49$	<i>F — незадовільно (потрібна додаткова робота)</i>	

## 10. Додаткова інформація з дисципліни (освітнього компонента)

Теоретичні питання:

1. Основні поняття алгебри висловлень.
2. Тотожності алгебри висловлень. Приклади доведення.
3. Принцип дуальності. Узагальнене правило де Моргана в алгебрі висловлень.
4. Логічний наслідок і логічна еквівалентність формул в алгебрі висловлень.
5. Основні поняття теорії множин.
6. Доведення законів алгебри множин.
7. Скінчені множини. Потужність скінченої множини.
8. Поняття алгебри та кільця множин.
9. Декартовий добуток множин.
10. Основні поняття теорії відношень.
11. Бінарні відношення. Способи задання бінарних відношень.
12. Операції над бінарними відношеннями.
13. Властивості бінарних відношень.
14. Транзитивне замикання.
15. Відношення еквівалентності та відношення порядку.
16. Розбиття множини. Фактор-множина.
17. Функція як частинний випадок відношення.
18. Основні поняття комбінаторики. Загальне поняття вибірки.
19. Розміщення з повтореннями та без повторень.
20. Комбінації з повтореннями та без повторень.
21. Упорядковані розбиття.
22. Біноміальна та поліноміальна формули. Трикутник Паскаля.
23. Застосування кореневих дерев в комбінаторних задачах.
24. Алгебричні структури з однією бінарною операцією.
25. Означення групи. Основні властивості груп.
26. Група підстановок (Загальні поняття).
27. Парні та непарні підстановки.
28. Адитивна та мультиплікативна групи лишків.
29. Поняття підгрупи. Критерій підгрупи.
30. Гомоморфізми груп: Основні визначення та теореми.
31. Циклічні групи.
32. Суміжні класи.
33. Скінченні групи. Теорема Лагранжа.
34. Наслідки з теореми Лагранжа.

35. *Нормальні дільники.*
36. *Поняття фактор-групи.*
37. *Гомоморфізми груп. Теорема про ядро і образ гомоморфізму.*
38. *Поняття кільця. Основні властивості кілець.*
39. *Підкільце. Критерій підкільця.*
40. *Кільця з одиницею.*
41. *Дільники нуля. Поняття області цілісності та поля.*
42. *Поняття про ідемпотентні кільця.*
43. *Основні поняття теорії графів.*
44. *Степені вершин графів. Теорема про суму степенів вершин.*
45. *Зв'язність неорієнтованих графів.*
46. *Ейлерові та напівейлерові графи.*
47. *Поняття про гамільтонові і напівгамільтонові графи.*
48. *Спеціальні типи графів.*
49. *Ізоморфізм і гомеоморфізм графів. Матриця суміжності.*
50. *Плоскі та планарні графи.*
51. *Грані графа. Формула Ейлера.*
52. *Дуальні графи.*
53. *Степень грані графа. Теорема про суму степенів граней.*
54. *Наслідок з формули Ейлера для плоских графів.*
55. *Фарбування вершин та граней графа.*
56. *Поняття про орієнтовані графи.*

**Робочу програму навчальної дисципліни (силабус):**

**Складено** *к.ф.-м.н., Стусь Олександр Вікторович*

**Ухвалено** кафедрою ММСА (протокол № 13 від 05.06.2024)

**Погоджено** Методичною комісією НН ІПСА (протокол № 10 від 24.06.2024)