



АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Робоча програма навчальної дисципліни (Силабус)

Реквізити навчальної дисципліни

Рівень вищої освіти	<i>Перший (бакалаврський)</i>
Галузь знань	<i>12 Інформаційні технології</i>
Спеціальність	<i>122 Комп'ютерні науки</i>
Освітня програма	<i>Інтелектуальні сервіс-орієнтовані розподілені обчислення Системи і методи штучного інтелекту</i>
Статус дисципліни (код)	<i>Нормативна</i>
Форма навчання	<i>очна(денна)/дистанційна/змішана</i>
Рік підготовки, семестр	<i>1 курс, осінній</i>
Обсяг дисципліни	<i>4,0 кредитів ЄКТС, 120 годин, 36 год. – лекції, 36 год. – практика, СРС – 48 год.</i>
Семестровий контроль/ контрольні заходи	<i>Залік, МКР, РР</i>
Розклад занять	<i>https://schedule.kpi.ua/</i>
Мова викладання	<i>Українська</i>
Інформація про керівника курсу / викладачів	<i>Лектор: к.ф.-м.н., доцент, Бохонов Юрій Євгенович, Vokhonov.Yuriy@Ill.kpi.ua к.ф.-м.н., доцент, Мінарченко Олександр Миколайович Практичні: к.ф.-м.н., доцент, Бохонов Юрій Євгенович, minar@ua.fm к.ф.-м.н., доцент, Мінарченко Олександр Миколайович</i>
Розміщення курсу	<i>Googleclassroom https://classroom.google.com/w/MTU4NDY3OTUyMjkz/t/all http://mmsa.kpi.ua/sites/default/files/po3_sylabus_aag_2023-24.pdf https://ela.kpi.ua/handle/123456789/48175</i>

Програма навчальної дисципліни

1. Опис навчальної дисципліни, її мета, предмет вивчення та результати навчання

Дана дисципліна є однією з фундаментальних в освітній програмі. Вона включає:

- основи лінійної алгебри (лінійні простори, оператори, матриці та їхні визначники, властивості, обчислення та застосування; матриці, види матриць, операції над матрицями, властивості операцій над матрицями, обернена матриця, зв'язок між матрицями лінійного оператора у різних базисах; матричні рівняння, основні методи розв'язування однорідних та неоднорідних систем лінійних рівнянь; застосування лінійної алгебри в прикладних задачах, зокрема, моделях динаміки популяцій та моделях міжгалузевого аналізу);
- основи векторної алгебри в двох та трьохвимірному просторах (операції над векторами, властивості операцій; скалярний, векторний та мішаний добутки векторів, їхні властивості, обчислення, геометрична та прикладна інтерпретація, застосування);
- основи аналітичної геометрії на площині та в просторі (пряма на площині, різні вигляди рівняння прямої, кути між прямими, умови перпендикулярності та паралельності прямих, рівняння прямих як лінійна модель відповідних процесів; площина в просторі, види рівнянь площини, кути між площинами, умови перпендикулярності та паралельності площин,

рівняння площини як модель певних процесів; пряма в просторі, різні вигляди рівняння прямої, кути між прямими в просторі, кут між прямою в просторі та площиною, умови перпендикулярності та паралельності, застосування, відстань від точки до прямої та площини, відстань між мимобіжними прямими;

- канонічні рівняння ліній другого порядку (еліпс, гіпербола, парабола, їхні основні характеристики та застосування);
- зведення загальних рівнянь ліній другого порядку на площині до головних осей.

По завершенню курсу студент має набути наступні програмні результати навчання: знання теоретичних та практичних основ алгебри та аналітичної геометрії, зокрема, рівняння прямих та площин, кривих на площині та зведення їхніх рівнянь до канонічного вигляду, теорію матриць та їхніх визначників, основи теорії лінійних операторів у лінійних просторах.

У процесі навчання студент має оволодіти такими загальними, фаховими компетентностями та програмними результатами навчання:

ЗК1 «Здатність до абстрактного мислення»

ЗК6 «Здатність вчитися й оволодівати сучасними знаннями»

ЗК11 «Здатність приймати обґрунтовані рішення»

ФК1 «Здатність до математичного формулювання та досліджування неперервних та дискретних математичних моделей, обґрунтовування вибору методів і підходів для розв'язування теоретичних і прикладних задач у галузі комп'ютерних наук, аналізу та інтерпретування»

ПРН2 «Використовувати сучасний математичний апарат неперервного та дискретного аналізу, лінійної алгебри, аналітичної геометрії, в професійній діяльності для розв'язання задач теоретичного та прикладного характеру в процесі проектування та реалізації об'єктів інформатизації»

2. Пререквізити та постреквізити дисципліни (місце в структурно-логічній схемі навчання за відповідною освітньою програмою)

Дисципліна передує всім іншим дисциплінам. Дисципліни, які базуються на результатах навчання з даної дисципліни: Лінійна алгебра, Математичний аналіз, Математична логіка та теорія алгоритмів, Дискретна математика, Чисельні методи, Основи фізики, Фізика коливально-хвильових процесів, Теорія ймовірностей, ймовірності процеси та математична статистика, Методи і системи штучного інтелекту, Методи оптимізації, Основи системного аналізу.

3. Зміст навчальної дисципліни

Розділ 1. Лінійні простори та підпростори, лінійні оператори та їхні матриці

Тема 1.1. Лінійні простори. Лінійна залежність та незалежність векторів. Геометричні простори. Ізоморфізм лінійних просторів. Розмірність лінійного простору. Доповнення базису підпростору до базису простору.

Тема 1.2. Лінійні оператори, матриця оператора у даному базисі. Дії з матрицями, операція транспонування, властивості. Зв'язок між матрицями оператора у різних базисах.

Розділ 2. Теорія визначників матриць

Тема 2.1. Поняття про алгебру Грасмана, зовнішній добуток та його властивості.

Тема 2.2. Визначення детермінанта матриці. Властивості детермінантів. Ранг матриці та її мінори. Питання існування оберненої матриці, та методи її знаходження. Матричні рівняння.

Розділ 3. Системи лінійних рівнянь

Тема 3.1. Системи лінійних рівнянь. Методи Гауса та Крамера розв'язання лінійних систем .
Тема 3.2. Загальна теорія лінійних систем, дослідження на сумісність, теорема Кронекера-Капеллі. Фундаментальна система розв'язків. Різні способи визначення лінійного підпростору. Суми та перетини підпросторів. Пряма сума.

Розділ 4. Аналітична геометрія на площині та в просторі

Тема 4.1. Аналітична геометрія на площині. Ділення відрізка в даному співвідношенні. Різні форми рівняння прямої. Скалярний добуток векторів в аналітичній геометрії. Нормальне рівняння прямої, відхилення точки від прямої.

Тема 4.2. Аналітична геометрія у просторі. Векторний та мішаний добуток векторів, їхнє застосування. Тотожність Якобі для векторного добутку, поняття про алгебру Лі.

Різні форми рівняння площини. Відхилення точки від площини. Мимобіжні прямі та спільний перпендикуляр до них.

Розділ 5.Криві другого порядку на площині,загальна теорія. Канонічні рівняння поверхонь другого порядку у просторі.

Тема 5.1.Канонічні рівняння кривих другого порядку.

Канонічні рівняння еліпсу, гіперболи та параболу у декартовій системі координат, деякі вироджені випадки. Ексцентриситет, директриси. Рівняння кривих другого порядку у параметричній формі та у полярних координатах. Ліній другого порядку як канонічні перерізи.

Тема 5.2.Зведення загального рівняння другого порядку до головних осей.

Зсув та поворот системи координат. Знаходження системи координат, у якій крива має канонічне рівняння.

4. Навчальні матеріали та ресурси

Базова:

1. Алгебра та аналітична геометрія: Лінійна алгебра [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 124 «Системний аналіз» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад. Ю. Є. Бохонов. – Електронні текстові дані (1 файл: 4,97 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. – 273 с.
2. Алгебра та геометрія. Лінійна алгебра [Електронний ресурс]: посібн. для студ. спеціальності 122 «Комп'ютерні науки», освітньої програми «Інтелектуальні сервіс-орієнтовані розподілені обчислення» / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: Ю. Є. Бохонов. – Електронні текстові дані (1 файл: 3,54 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. – 243 с. (6,24 авт. арк.)
3. Алгебра та аналітична геометрія: Практикум [Електронний ресурс]: практикум для студ. спеціальності 122 «Комп'ютерні науки» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад. Ю. Є. Бохонов. – Електронні текстові дані (1 файл: 3,02 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. – 189 с.

Додаткова:

1. Безущак О.О. Навчальний посібник із лінійної алгебри для студентів механіко-математичного факультету / О. О. Безущак, О. Г. Ганюшкін, Є. А. Кочубінська. – К.: ВПЦ «Київський університет», 2019. – 224 с.
2. Завало С.Т. Курс алгебри: підручник / С.Т. Завало. – К., Вища школа, 1985.
3. Завало С.Т. Алгебра і теорія чисел: навч. посіб./ С.Т. Завало, С.С. Левищенко та ін. – К., Вища школа, 1986. – 264 с.

5. Методика опанування навчальної дисципліни(освітнього компонента)

Лекційні заняття

№	Назва теми лекції та перелік основних питань
01.	Лінійні простори. Лінійна залежність та незалежність векторів. Приклади. Геометричні простори.Ізоморфізм лінійних просторів. Розмірність лінійного простору. Рекомендована література: [1]-[3].
02.	Підпростори лінійних просторів. Доповнення базису підпростору до базису простору. Геометричні приклади. Сума та перетин лінійних підпросторів. Рекомендована література: [1]-[3].
03.	Геометричні простори. Площина та простір як лінійні простори. Колінеарність та компланарність. Ділення відрізка в даному відношенні. Рекомендована література: [1]-[3].
04.	Матриці та дії з ними. Операція транспонування. Комутант, поняття про алгебру Лі. Елементарні матриці. Зображення матриці як добутку елементарних. Рекомендована література: [1]-[3].
05.	Лінійні оператори та їхні матриці. Зв'язок між матрицями оператора в різних базисах. Рекомендована література: [1]-[3].
06.	Поняття про алгебру Грасмана, зовнішній добуток та його властивості. Рекомендована література: [1]-[3], [5].
07.	Детермінант (визначник) матриці та його властивості. Рекомендована література: [1]-[3].
08.	Детермінант добутку матриць, Теорема Лапласа. Рекомендована література: [1]-[3].
09.	Ранг матриці та її мінори. Методи знаходження рангу матриці, визначників та оберненої матриці. Рекомендована література: [1]-[3].
10.	Загальна теорія лінійних систем, дослідження на сумісність, теорема Кронекера-Капеллі. Фундаментальна система розв'язків. Різні способи визначення лінійного підпростору. Суми та перетини підпросторів. Пряма сума. Рекомендована література: [1]-[3].
11.	Вектори на площині та в просторі. Скалярний та векторний добутки. Їхні властивості. Рекомендована література: [1], [3].
12.	Векторний та мішаний добутки векторів, їхнє застосування. Тотожність Якобі для векторного добутку, Рекомендована література: [1], [3].
13.	Аналітична геометрія на площині. Різні форми рівняння прямої. Нормальне рівняння прямої, відхилення точки від прямої. Рекомендована література: [1],[3].
14.	Різні форми рівняння площини. Відхилення точки від площини. Кут між прямою і площиною. Мимобіжні прямі, спільний перпендикуляр до них. Рекомендована література: [1],[3].
15.	Канонічні рівняння кривих другого порядку. Ексцентриситет, директриси. Рекомендована література: [1], [3].
16.	Рівняння кривих другого порядку у параметричній формі та у полярних координатах. Ліній другого порядку як конічні перерізи. Оптичні властивості кривих другого порядку. Рекомендована література: [1], [3].
17.	Перетворення загального рівняння другого порядку з застосуванням зсуву. Рекомендована література: [1], [3].
18.	Зведення загального рівняння другого порядку до головних осей. Поворот системи координат. Знаходження системи координат, у якій крива має канонічне рівняння. Рекомендована література: [1], [3].

Практичні заняття

№	Назва теми занять
01.	Приклади лінійних просторів. Дослідження систем векторів на лінійну залежність. Задачі на геометричні вектори.
02.	Підпростори лінійних просторів. Доповнення базису підпростору до базису простору. Геометричні приклади. Сума та перетин лінійних підпросторів. Знаходження базисів.
03.	Геометричні простори. Площина та простір як лінійні простори. Колінеарність та компланарність. Ділення відрізка в даному відношенні. Рекомендована література: [1]-[3], [5].
04.	Матриці та дії з ними. Операція транспонування.
05.	Лінійні оператори та їхні матриці.
06.	Детермінанти матриць, методи обчислення.
07.	Ранг матриці та її мінори. Різні методи знаходження рангу. Питання існування оберненої матриці, та методи її знаходження. Матричні рівняння.
08.	Матриця переходу до нового базису.
09.	Матриці лінійного оператора в різних базисах.
10.	Системи лінійних рівнянь. Методи Гауса та Крамера розв'язання лінійних систем .
11.	Фундаментальна система розв'язків. Різні способи визначення лінійного підпростору. Суми та перетини підпросторів. Пряма сума. Ядро і образ лінійного оператора.
12.	Різні типи рівняння прямої на площині.
13.	Скалярний та векторний добуток, їхні властивості.
14.	Мішаний добуток та його застосування..
15.	Пряма та площина у просторі, відхилення точки від прямої та площини.
16.	Криві другого порядку на площині. Канонічні рівняння, Ексцентриситет та директриса кривої другого порядку.
17.	Рівняння кривих другого порядку у полярних координатах та у параметричній формі. Загальне рівняння другого порядку та його перетворення за допомогою зсуву.
18.	Перетворення рівняння другого порядку за допомогою повороту системи координат. Зведення до канонічного вигляду.

6. Самостійна робота студента

Індивідуальні завдання з дисципліни «Алгебра та аналітична геометрія» складаються з розрахункової роботи з розділів 1-5.

Розрахункова робота сприяє поглибленому засвоєнню методів розв'язку типових математичних задач, що мають прикладне значення. Методичні рекомендації до виконання розрахункової роботи, варіанти завдань, термін виконання надає лектор всім групам потоку у гугл-класі. Викладачі, які ведуть практичні заняття, у двотижневий термін з призначеної дати здачі студентами робіт, перевіряють роботи та виставляють рейтингові бали.

№ з/п	Назви тем і питань, що виносяться на самостійне опрацювання та посилання на навчальну літературу	Кількість годин СРС
1.	Лінійні простори, підпростори лінійних просторів. Доповнення базису підпростору до базису простору. Геометричні приклади. Сума та перетин лінійних підпросторів. Рекомендована література: [1]-[3].	2
2.	Лінійні оператори та їхні матриці. Зв'язок між матрицями оператора в різних базисах. Рекомендована література: [1]-[3].	2
3.	Поняття про алгебру Грасмана, зовнішній добуток та його властивості. Рекомендована література: [1]-[3], [5].	2
4.	Детермінант (визначник) матриці та його властивості. Рекомендована література: [1]-[3].	2
5.	Ранг матриці та її мінори. Методи знаходження рангу матриці, визначників та оберненої матриці. Рекомендована література: [1]-[3].	2

№ з/п	Назви тем і питань, що виносяться на самостійне опрацювання та посилання на навчальну літературу	Кількість годин СРС
6.	Загальна теорія лінійних систем, дослідження на сумісність, теорема Кронекера-Капеллі. Фундаментальна система розв'язків. Різні способи визначення лінійного підпростору. Суми та перетини підпросторів. Пряма сума. Рекомендована література: [1]-[3].	2
7.	Векторний та мішаний добуток векторів, їхнє застосування. Тотожність Якобі для векторного добутку, Рекомендована література: [1], [3].	2
8.	Різні форми рівняння площини. Відхилення точки від площини. Кут між прямою і площиною. Мимобіжні прямі, спільний перпендикуляр до них. Рекомендована література: [1],[3].	2
9.	Зведення загального рівняння другого порядку до головних осей. Поворот системи координат. Знаходження системи координат, у якій крива має канонічне рівняння. Рекомендована література: [1], [3].	2
10.	Підготовка до заліку	30

Політика та контроль

7. Політика навчальної дисципліни (освітнього компонента)

Усі роботи студенти мають прикріплювати в особистому кабінеті гугл-класу. Дедлайни кожного завдання позначені в щотижневих завданнях у гугл-класі. Роботи мають бути виконані з дотриманням академічної доброчесності. У період роботи в дистанційному режимі лектор може запропонувати студентам пройти запропоновані ним онлайн-курси на платформі Coursera. Також сертифікати цих курсів можуть бути частково зараховані згідно до Положення.

8. Види контролю та рейтингова система оцінювання результатів навчання (PCO)

Семестровий контроль: залік.

Таблиця відповідності рейтингових балів оцінкам за університетською шкалою:

Бали: Автомат: практики + МКР + РР або Залік: РР + Залікова контрольна робота	Оцінка
100...95	Відмінно
94...85	Дуже добре
84...75	Добре
74...65	Задовільно
64...60	Достатньо
Менше 60	Незадовільно
РР не зараховано або менше 30	Не допущено

Рейтинг студента з дисципліни за II семестр складається з балів, що він отримує за:

- ~ виконання домашніх робіт (18) - по одному балу за ДЗ;
- ~ виконання контрольних робіт (модульна контрольна робота МКР розбивається на дві частини - МКР-1 і МКР-2), розрахункової роботи (РР).

1. Критерії нарахування балів.

1) Кожна частина модульної контрольної роботи МКР (МКР-1 і МКР-2) оцінюється у 12 балів за такими критеріями:

~ "відмінно" ~ повна відповідь (не менше 90% необхідної інформації) ~ 11-12 балів;

~ "добре" ~ достатньо повна відповідь (не менше 75% необхідної інформації), або повна відповідь з незначними неточностями ~ 8-10 балів;

~ "задовільно" ~ неповна відповідь (не менше 60% необхідної інформації) та незначні помилки
~ 6-7 балів;

~ "незадовільно" ~ відповідь не відповідає вимогам на "задовільно" ~ 0 балів;

2) Розрахункова робота (РР) оцінюється у 18 балів.

Робота оцінюється у процентному відношенні правильно розв'язаних завдань:

~ "відмінно" ~ повна відповідь (не менше 90% необхідної інформації) ~ 16-18 балів;

~ "добре" ~ достатньо повна відповідь (не менше 75% необхідної інформації), або повна відповідь з незначними неточностями ~ 14-17 балів;

~ "задовільно" ~ неповна відповідь (не менше 60% необхідної інформації) та незначні помилки
~ 11-13 балів;

~ "незадовільно" ~ рівень не відповідає вимогам на "задовільно" ~ 0 балів;

3) Кожна домашня робота оцінюється максимум у 2 бали;

4) Кожна контрольна робота (МКР-1, МКР-2) оцінюється у 12 балів

~ "відмінно" ~ повна відповідь (не менше 90% необхідної інформації) ~ 11-12 балів;

~ "добре" ~ достатньо повна відповідь (не менше 75% необхідної інформації), або повна відповідь з незначними неточностями ~ 9-10 балів;

~ "задовільно" ~ неповна відповідь (не менше 60% необхідної інформації) та незначні помилки
~ 6-8 балів;

~ "незадовільно" ~ відповідь не відповідає вимогам на "задовільно" ~ 0-5 балів.

2. Умовою першої атестації є поточний рейтинг не менше 50% запланованих балів. Умова другої атестації ~ поточний рейтинг не менше 50% запланованих балів.

3. Умовою допуску до екзамену є стартовий рейтинг не менше 40 балів.

Таблиця відповідності рейтингових балів оцінкам за університетською шкалою:

Бали: практичні заняття та лекції +МКР + + РР + екзаменаційна робота	Оцінка
100...95	Відмінно
94...85	Дуже добре
84...75	Добре
74...65	Задовільно
64...60	Достатньо
Менше 60	Незадовільно
стартовий рейтинг менше 40 балів	Не допущено

9. Додаткова інформація з дисципліни (освітнього компонента)

Теоретичні питання до заліку:

1. Лінійні простори, базис, розмірність, ізоморфні лінійні простори.
2. Дії над матрицями: множення на число, додавання, добуток матриць. Властивості дій.
3. Алгебра Грасмана, зовнішній добуток. Побудова теорії визначників, їхнє обчислення і властивості.
4. Мінор матриці k -го порядку, алгебраїчне доповнення елемента. Обчислення визначника n -го порядку.
5. Обернена матриця, її обчислення. Розв'язання матричних рівнянь.
6. Ранг матриці, його обчислення. Теорема про базисний мінор.
7. Матриця лінійного оператора, зв'язок між матрицями лінійного оператора у різних базисах.
8. Розв'язання квадратної системи алгебраїчних рівнянь за формулами Крамера.
9. Дослідження на сумісність і розв'язання загальної системи алгебраїчних рівнянь методом Гаусса. Теорема Кронекера-Капеллі.
10. Розв'язання системи лінійних однорідних рівнянь, фундаментальна система розв'язків.

11. Лінійні операції над векторами: додавання, віднімання, множення на число. Проекція вектора на вісь.
12. Декартова система координат. Визначення базису. Теорема про єдиність розкладу вектора за базисом.
13. Основні задачі декартової системи координат: поділ відрізка навпіл та у відношенні λ . Координати вектора, відстань між двома точками.
14. Полярна система координат. Важливі криві у полярних координатах.
15. Перетворення прямокутної системи координат: поворот на кут α та паралельне перенесення, формули перетворення.
16. Скалярний добуток векторів, його властивості, координатна форма.
17. Векторний добуток векторів, його властивості, координатна форма, обчислення площ.
18. Мішаний добуток векторів, геометричний зміст, властивості, координатна форма. Обчислення об'ємів.
19. Різні вигляди рівняння прямої на площині.
20. Кут між двома прямими в R^2 умови паралельності і перпендикулярності.
21. Нормальне рівняння прямої в R^2 . Відхилення та відстань від точки до прямої.
22. Різні вигляди рівняння площини.
23. Кут між двома площинами, умови паралельності і перпендикулярності.
24. Нормальне рівняння площини. Відхилення та відстань від точки до площини.
25. Різні вигляди рівняння прямої в R^3 . Кут між прямими, умови паралельності і перпендикулярності.
26. Взаємне розташування прямої і площини. Точка їх перетину. Кут між прямою і площиною, умови паралельності і перпендикулярності.
27. Еліпс, його канонічне рівняння та основні характеристики.
28. Гіпербола, її канонічне рівняння та основні характеристики.
29. Парабола, її канонічне рівняння та основні характеристики.
30. Зведення загального рівняння другого порядку до канонічного вигляду.

Робочу програму навчальної дисципліни (силабус):

Складено к.ф.-м.н., доцент, Бохонов Юрій Євгенович

Ухвалено кафедрою ММСА (протокол № 13 від 05.06.2024)

Погоджено Методичною комісією НН ІПСА (протокол № 10 від 24.06.2024)

Додаток А – Питання для МКР1.

1. Лінійні простори, базиси в лінійних просторах.
2. Матриці та дії з ними.
3. Детермінанти матриць, методи обчислення.
Ранг матриці та її мінори.

Зразок білету:

1. Знайти яку-небудь базу системи векторів

$$a = \{1, -1, 2\}, \quad b = \{-1, 1, -1\}, \quad c = \{2, -1, 1\}.$$

2. Нехай вектори $a = \{a_1, a_2, a_3\}$ задано своїми координатами у канонічному базисі:

$$a_1 = (1; -1; 1)^T, \quad a_2 = (0; -1; 1)^T, \quad a_3 = (1; 2; -1)^T.$$

Перевірити, що вони утворюють базис. Розкласти за ним вектор $b = (2; -2; 3)^T$.

3. Використовуючи схему Гауса, знайти обернену матрицю до матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Додаток Б – Питання для МКР2.

1. Матриці лінійного оператора в різних базисах.
2. Лінійні алгебраїчні системи рівнянь.
3. Різні форми рівняння прямих та площинг. Нормальні рівняння.

Зразок білету:

1. Розв'язати лінійну систему. Знайти фундаментальну систему розв'язків однорідної системи.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right).$$

2. Лінійний оператор A у базисі $f = \{f_1 = 1, f_2 = x, f_3 = x^2\}$

має матрицю

$$[A]_{e,e} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Знайти його матрицю $[A]_{g,g}$ у базисі

$$g = \{g_1 = -1 + 2x - 2x^2, g_2 = -1 + x, g_3 = 2 - 2x + x^2\}.$$

3. Дано дві прямі:

$$x - 3y + 5 = 0, 3x - y - 2 = 0.$$

Встановити, в якому куті – гострому чи тупому – лежить початок координат. Написати рівняння бісектриси гострого кута і знайти цей кут.

Вказівка: використовувати відхилення точок від прямих.

Зразок РР

I. Аналітична геометрія

1. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах \vec{a}, \vec{b} , якщо

$$\vec{a} = 3\vec{p} + 2\vec{q}, \vec{b} = 2\vec{p} - \vec{q}, |\vec{p}| = 4, |\vec{q}| = 3, (\vec{p}, \vec{q}) = \frac{3\pi}{4}.$$

2. Знайти об'єм тетраедра A_1, A_2, A_3, A_4 , а також рівняння та довжину висоти, опущеної з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

3. З'ясувати, в якій півплощині по відношенню до початку координат знаходиться точка $M_0(1, -1, 2)$, якщо площина проходить через точки $M_1(1, 5, -7), M_2(-3, 6, 3), M_3(-2, 7, 3)$. Знайти відстань від цієї точки до площини.

4. Написати рівняння площини, що проходить через точку $A(1, 0, -2)$ ортогонально вектору \vec{BC} , $B(2, -1, 3), C(0, -3, 2)$.

5. Написати канонічне рівняння прямої, що є лінією перетину площин

$$2x - 3y - 2z + 6 = 0, x - 3y + z + 3 = 0.$$

Написати також рівняння бісекторіальної площини гострого кута між цими площинами.

6. Знайти проекцію точки $M(0, 2, 1)$ на пряму $\frac{x-1,5}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{1}$. Виписати матрицю оператора проектування, перевірити її ідемпотентність.

II. Лінійна алгебра

7. Знайти яку-небудь фундаментальну систему розв'язків і загальний розв'язок лінійної системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$$

8. Знайти координати вектора x у базисі $e' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$, якщо його задано у базисі $e = \{e_1, e_2, e_3\}$. Відомо зв'язок між базисами:

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 + \frac{8}{9}e_3, \\ e'_2 = -8e_1 - e_2, \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

9. Знайти матрицю $[A]_{e',e'}$ у «новому» базисі $e' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$, якщо її задано у «старому» базисі

$e = \{e_1, e_2, e_3\}$. Відомо:

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 - e_2 + e_3, \\ e'_2 = -e_1 + e_2 - 2e_3, \\ e'_3 = -e_1 + 2e_2 + e_3, \end{cases} \quad [A]_{e,e} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

10. Знайти матрицю проектування на площину $x - z = 0$. Перевірити її ідемпотентність.